EXERCICE N°3: | 40' | 7 points

Soit f définie sur IR et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On désigne par : • g la restriction de f à l'intervalle $]0,+\infty[$.

• h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$.

1°) On donne $g(x)=x(1-\ln(x))$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$. Que peut- on dire de la branche infinie de $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$?

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation $g(x)=0$.

2°) On suppose que h vérifier les conditions suivantes :

- h est dérivable sur $]-\infty,0]$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-2x)=0$.
- Le tableau de variation de h est ci-contre :

x	$-\infty$		0
$h'(x)$		$+$	1
h	$-\infty$	↗	0

- Pour tout x appartiennent à $]-\infty,0]$ on a : $2x\le h(x)\le x$.

a) Justifier que h est une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n=h^{-1}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ où h^{-1} désigne la fonction réciproque de h.

Montrer que la suite $(U_n)_{n\in N^*}$ est convergente.

3°) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f sue IR.

4°) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $-\infty$, une asymptote dont on donnera une équation cartésienne.

b) Tracer $\mathscr{C}$ en précisant les demi-tangentes au point O.

5°) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la région de plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droite d'équations $x=1$ et $x=e$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn